Espaces topologiques v.s. espaces métriques

Soit X un ensemble non vide.

49.1 **Déf** Θ est une topologie pour X $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \Theta \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \\ \Theta \neq \emptyset \\ \Theta \text{ est stable par union} \\ \Theta \text{ est stable par intersection finie} \end{cases}$

alors (X, Θ) est un espace topologique

49.2 **Déf** Soit (X, Θ) un espace topologique. Soit $A \in \mathcal{P}(X)$

- A est une partie ouverte (ou A est 1 ouvert) $\Leftrightarrow A \in \Theta$
- A ——— fermée (ou A est 1 fermé) $\Leftrightarrow A^c \in \Theta$

49.3 **Déf** Soit (X, Θ) un espace topologique.

(X, Θ) est dit séparé $\Leftrightarrow \forall (x,y) \in X^2, x \neq y \Rightarrow \exists (U,V) \in \Theta^2$ tq $\begin{cases} x \in U \\ y \in V \\ U \cap V = \emptyset \end{cases}$

49.4 **Déf** d est une distance sur X $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} d \in \mathcal{F}(X^2, \mathbb{R}^+) \\ \forall (x,y) \in X^2 \quad d(x,y) = d(y,x) \\ \forall (x,y) \in X^2 \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ \forall (x,y,z) \in X^3 \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z). \end{cases}$

alors (X,d) est un espace métrique

49.5 **Déf** Soit (X,d) un espace métrique. Soit $x \in X$. Soit $r \in \mathbb{R}^{+*}$

La boule ouverte de centre x et de rayon r $= \mathcal{B}(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$

49.6 **Déf** Soit (X,d) un espace métrique.

On appelle topologie induite par d l'ensemble

$$\Theta_d = \left\{ \bigcup_{(x,r) \in A} \mathcal{B}(x,r) \mid A \in \mathcal{P}(X \times \mathbb{R}^{+*}) \right\}.$$

49.7 **Pté** Si (X,d) est un espace métrique, (X, Θ_d) est un espace topologique

Rq La réciproque est fausse, c-à-d qu'il existe des espaces topologiques pour lesquels on ne peut pas trouver de distance définissant les mêmes ouverts.

• $\Theta_d \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ (car une union de boules ouvertes est bien une partie de X).

Preuve • $X \neq \emptyset$ donc il existe $\tilde{x} \in X$. Soit $\tilde{r} \in \mathbb{R}^{+*}$ $\mathcal{B}(\tilde{x},\tilde{r}) = \bigcup_{(x,r)\in A=\{(\tilde{x},\tilde{r})\}} \mathcal{B}(x,r) \in \Theta_d$.
donc $\Theta_d \neq \emptyset$

• Soit $(\Theta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille quelconque d'éléments de Θ_d.
Il existe donc $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \mathcal{P}(X\times\mathbb{R}^{+*})^\Lambda$ tel que $\forall \lambda\in\Lambda$, $\Theta_\lambda = \bigcup_{(x,r)\in A_\lambda} \mathcal{B}(x,r)$.
Donc $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Theta_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcup_{(x,r)\in A_\lambda}\mathcal{B}(x,r) = \bigcup_{(x,r)\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}\mathcal{B}(x,r)$ or $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda \in \mathcal{P}(X\times\mathbb{R}^{+*})$
donc $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Theta_\lambda \in \Theta_d$, autrement dit Θ_d est stable par union

• Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $(\Theta_i)_{i\in[1..n]} \in \Theta_d^{\,n}$. Il existe $(A_i)_{i\in[1..n]} \in \mathcal{P}(X\times\mathbb{R}^{+*})^n$ tel que $\forall i\in[1..n]$ $\Theta_i = \bigcup_{(x,r)\in A_i}\mathcal{B}(x,r)$. donc $\bigcap_{i=1}^n\Theta_i = \bigcap_{i=1}^n\bigcup_{(x,r)\in A_i}\mathcal{B}(x,r)$.
Pour $x\in\bigcap_{i=1}^n\Theta_i$ et pour $i\in[1..n]$ on a $x\in\Theta_i$ donc il existe $(y,\alpha)\in A_i$ tel que $x\in\mathcal{B}(y,\alpha)$. On pose alors $C(x,i)=y$ et $R(x,i)=\alpha$.
On pose alors $A=\{(x, \min_{i\in[1..n]}(R(x,i)-d(x,C(x,i)))) \mid x\in\bigcap_{i=1}^n\Theta_i\}$.

• $A\in\mathcal{P}(X\times\mathbb{R}^{+*})$ car $\forall x\in\bigcap_{i=1}^n\Theta_i$, $\forall i\in[1..n]$ $x\in\mathcal{B}(C(x,i),R(x,i))$
donc $d(x,C(x,i)) < R(x,i)$ $\cdot$ $R(x,i)-d(x,C(x,i)) > 0$
et donc $\min_{i\in[1..n]} R(x,i)-d(x,C(x,i)) \in \mathbb{R}^{+*}$.

• $\bigcap_{i=1}^n\Theta_i \in \bigcup_{(x,r)\in A}\mathcal{B}(x,r)$ car $\forall\tilde{x}\in\bigcap_{i=1}^n\Theta_i$, $\tilde{x}\in\mathcal{B}(\tilde{x}, \min_{i\in[1..n]} R(\tilde{x},i)-d(\tilde{x},C(\tilde{x},i)))$

• Réciproquement soit $y\in\bigcup_{(x,r)\in A}\mathcal{B}(x,r)$. Il existe alors $\tilde{x}\in\bigcap_{i=1}^n\Theta_i$ tel que $y\in\mathcal{B}(\tilde{x},\min_{i\in[1..n]} R(\tilde{x},i)-d(\tilde{x},C(\tilde{x},i)))$ Donc $\forall i\in[1..n]$ on a
$d(y,C(\tilde{x},i)) \le d(y,\tilde{x})+d(\tilde{x},C(\tilde{x},i)) < [R(\tilde{x},i)-\cancel{d(\tilde{x},C(\tilde{x},i))}]+\cancel{d(\tilde{x},C(\tilde{x},i))}$
donc $y\in\mathcal{B}(C(\tilde{x},i),R(\tilde{x},i)) \subset \Theta_i$ (car par déf $(C(\tilde{x},i),R(\tilde{x},i))\in A_i$.
d'où $y\in\bigcap_{i=1}^n\Theta_i$ soit $\bigcup_{(x,r)\in A}\mathcal{B}(x,r)\subset\bigcap_{i=1}^n\Theta_i$

Par double inégalité $\bigcap_{i=1}^n\Theta_i = \bigcup_{(x,r)\in A}\mathcal{B}(x,r)\in\Theta_d$ car $A\in\mathcal{P}(X\times\mathbb{R}^{+*})$.
Donc Θ_d est stable par intersection finie

Ainsi Θ_d est bien une topologie pour X. CQFD.

49.8 **Pté** Si (X,d) est un espace métrique, (X,Θ_d) est un espace séparé.

Preuve: Soit $(x,y)\in X^2$. Si $x\neq y$ $e=d(x,y)>0$. On pose $U=\mathcal{B}(x,e/3)$ $V=\mathcal{B}(y,e/3)$.
$U\in\Theta_d$, $V\in\Theta_d$ et Si $z\in U\cap V$ on aurait
$x\in U$ et $y\in V$ $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y) \le e/3+e/3 = \frac{2}{3}e = \frac{2}{3}d(x,y)$
or $1\le 2/3$ imp. d'où $U\cap V=\emptyset$.

49.9 **Déf** Soit (X, Θ) un espace topologique. Soit $A \in \mathcal{P}(X)$.
A est une partie compacte de (X, Θ)
$\iff \forall (\Theta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ famille d'ouverts $\left[A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Theta_\lambda \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists (i_i)_{i\in[1,n]} \in \Lambda^n, A \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Theta_i \right]$

"A est compacte ssi de tout recouvrement par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini"

49.10 **Pté** Sous les mêmes notations
A est une partie compacte de (X, Θ)
$\iff \forall (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ famille de fermés $\left[\forall n\in\mathbb{N}, \forall (i_i)_{i\in[1,n]} \in \Lambda^n, \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda \cap A \neq \emptyset \right]$

"A est compacte ssi l'intersection de toute famille de fermés dont les intersections finies intersectent A, intersecte A"

démo :
A compacte $\iff \forall (\Theta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ famille d'ouverts $\left[A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Theta_\lambda \Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}, \exists (i_i)_{i\in[1,n]} \in \Lambda^n, A \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Theta_i \right]$

$\iff \forall (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ famille de fermés $\left[A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda^c \Rightarrow \text{———}, A \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i^c \right]$

$\iff \text{———} \left[A \subset \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda\right)^c \Rightarrow \text{———}, A \subset \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i\right)^c \right]$

$(A \Rightarrow B)$
$\iff (\text{non} B \Rightarrow \text{non} A)$
c'est la contraposée.

$\iff \text{———} \left[\forall n\in\mathbb{N}, \forall (i_i)_{i\in[1,n]} \in \Lambda^n, A \not\subset \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i\right)^c \Rightarrow A \not\subset \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda\right)^c \right]$

$\iff \text{———} \left[\text{———}, A \cap \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i \neq \emptyset \Rightarrow A \cap \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda \neq \emptyset \right]$

49.11 **Déf** Soit (X, d) un espace métrique compact. Soit $A \in \mathcal{P}(X)$.
A est une partie compacte de $(X,d) \iff \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, \text{adh}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) \cap A \neq \emptyset$

49.12 **Pté** Soit (X,d) un espace métrique. Soit $A \in \mathcal{P}(X)$
A est compacte pour $(X,d) \iff$ A est compacte pour (X, Θ_d)

"de tte suite on peut extraire une suite qui converge (dans A!)"

"de tout recouvrement par des ouverts on peut extraire un sous recouvrement fini"

démo C'est le théorème de Borel Lebesgue : cf fiche 10.